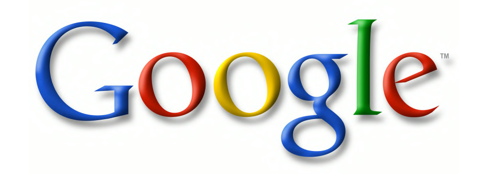
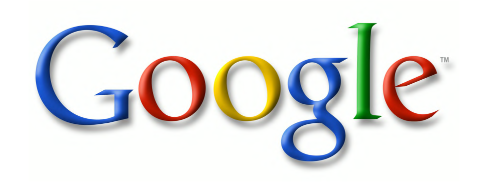





DEO ADJUVANTE





DU

FROTTEMENT DE GLISSEMENT

SPÉCIALEMENT

SUR LES RAILS DES CHEMINS DE FER.

SA VARIATION AVEC LA VITESSE.

FORMULE REPRÉSENTATIVE.

VALEURS NUMÉRIQUES DES COEFFICIENTS DE CETTE FORMULE

PAR M. H. BOCHET,

INGÉNIEUR DES MINES.

1 fr. 50

à M. Louis Figuie
Hommage de l'aut
H Bochet

PARIS.

DALMONT ET DUNOD, ÉDITEURS,

Précédemment Carilian-Gœury et Vve Dalmont,

LIBRAIRES DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, n° 49.

1858



dans ses belles expériences exécutées à Metz en 1831-32-33, expériences très-nombreuses et très-concluantes, *mais seulement dans les limites entre lesquelles elles ont été faites.* Or, dans toutes ces expériences, la vitesse du glissement, bien qu'ayant été très-variée, n'a jamais atteint 4 mètres par seconde, et même elle a rarement dépassé 3 mètres; presque toujours elle n'a varié que de 0 à 2 ou 3 mètres.

Doutes permis sur son exactitude dans le cas du glissement des wagons sur les rails.

3. Dans le glissement des wagons sur les rails des chemins de fer, où la vitesse initiale atteint et dépasse même quelquefois 20 et jusqu'à 25 mètres par seconde, et peut varier par conséquent, pendant le ralentissement, depuis 25 mètres et plus jusqu'à 0, la loi de l'indépendance de la vitesse, qui régit, au moins *sensiblement*, le phénomène du glissement à petites vitesses, est-elle encore suffisamment exacte? C'est ce qu'il était assurément permis de se demander. D'ailleurs il était nécessaire de déterminer précisément les valeurs (variables) du coefficient de glissement des wagons sur les rails, suivant les états différents dans lesquels la surface des rails est mise par les circonstances atmosphériques.

Nécessité d'expériences spéciales.

Expériences exécutées en 1851 par M. J. Poirée.

4. Des expériences ont été exécutées, dans le double but que je viens d'indiquer, en 1851, sur le chemin de fer de Lyon, par M. J. Poirée, ingénieur des ponts et chaussées, alors sous-directeur de ce chemin.

Conséquence de ces expériences; variation de l'intensité du glissement avec la vitesse.

Ces expériences (1) ont établi péremptoirement que,

---

sont les expériences de M. Morin qui, en jetant une lumière plus vive sur tous les détails du phénomène et en dissipant certains doutes légitimes qui pouvaient s'élever sur l'exactitude rigoureuse de la loi, ont donné à cette loi toute l'autorité dont elle jouit aujourd'hui.

(1) M. Poirée en a rendu compte à la *Société des Ingénieurs civils;* elles ont été discutées au sein de cette société (dans les séances des 17 septembre, 1 et 15 octobre 1852), et sont relatées dans le recueil de ses mémoires (année 1852, 2ᵉ trimestre).

dans le glissement direct (1) des wagons sur les rails, l'intensité de la résistance opposée au mouvement par le frottement de glissement varie, non-seulement avec l'état de rails et le poids des wagons (toujours proportionnellement à ce poids), mais encore avec la vitesse du glissement (diminuant à mesure que, toutes choses égales d'ailleurs, cette vitesse augmente).

5. Il m'a semblé qu'on pouvait déduire, des précieux résultats expérimentaux obtenus par M. J. Poirée, une formule rendant compte, d'une manière très-satisfaisante, de tous ces résultats, et, en même temps, de constitution rationnelle, conforme à l'ensemble des lois physiques qui paraissent régir le phénomène de la variation du glissement, et présentant par conséquent de grandes probabilités d'exactitude réelle et de généralité. Annonce d'une formule représentative de cette variation.

Je vais faire connaître comment j'ai procédé pour déterminer cette formule.

6. Il me faut d'abord, à cet effet, rappeler et bien préciser les circonstances des expériences de M. Poirée et les résultats qu'elles ont donnés (2). Rappel des circonstance et résultats des experiences de M. Poirée.

L'appareil d'expérience a été un wagon à ballast, plus ou moins chargé, remorqué par une locomotive avec l'intermédiaire d'un dynamomètre Morin, qui traçait à chaque instant, sur un rouleau de papier, l'intensité de la résistance opposée au mouvement par le wagon. Un pointage s'exécutait en même temps, de 5 en 5 secondes, ainsi qu'un autre pointage, distinct du précédent, à chaque passage devant un poteau télégraphique. Les distances précises, qui séparaient entre eux les différents poteaux télégraphiques successifs, ayant été relevées avec soin, on a pu, en les reportant ensuite sur les diagrammes des expé-

---

(1) C'est-à-dire par les roues des wagons glissant directement sur les rails, sans intermédiaire.

(2) J'ai eu, verbalement, de M. Poirée, des explications qui ne sont pas consignées dans l'article inséré au Recueil précité.

riences, déduire de ces diagrammes, la vitesse de marche, ainsi que la résistance opposée au mouvement par le wagon, à chaque instant et en chaque point de la ligne. Chaque observation était faite sur une partie de voie en palier et en alignement. Le frein du wagon était serré, de manière que ses roues fussent complétement enrayées; c'est ainsi que le wagon était traîné par la locomotive. Le wagon étant bas et complétement masqué par une grande caisse dans laquelle était enfermé le dynamomètre, et le temps ayant toujours été calme d'ailleurs, l'air n'exerçait aucune action sur le wagon même. La résistance que le wagon opposait au mouvement, et qui était accusée par le dynamomètre, était donc uniquement celle produite par le frottement de glissement des roues du wagon sur les rails.

7. Dans ces conditions, on a constamment reconnu sur les diagrammes que, lorsque la résistance, tracée sur le papier par le style du dynamomètre, se maintenait sensiblement constante sur un assez long parcours, la vitesse de marche se maintenait en même temps sensiblement constante, mais que, suivant que cette vitesse était plus ou moins grande, la résistance était plus ou moins faible, et que les variations qui se produisaient d'une façon marquée dans la vitesse étaient toujours accompagnées de variations correspondantes de la résistance (en sens inverse de celles de la vitesse), et réciproquement.

Ce résultat des expériences, assez nombreuses et faites chacune sur un assez long parcours, est assurément très-net et établit incontestablement le fait de la diminution ou de l'augmentation d'intensité du frottement de glissement du wagon sur les rails quand la vitesse augmente ou diminue.

8. Les nombres comparatifs *les plus nets et les plus certains*, que M. Poirée a seuls extraits de ses expériences, laissant de côté tout ce qui pouvait donner prise à quelque doute, ont été consignés par lui dans un tableau, que je reproduis ci-après :

Tableau i
de ces r

DATES — Juillet 1851	ÉTAT des rails.	Poids du wagon, p.	REMARQUES.	Numéros d'ordre des expériences.	Longueurs sur lesquelles la vitesse de marche et le tirage du wagon sont restés constants.	Vitesses de marches, v en mètres par seconde.	Tirages du wagon, f.	Rapport, du tirage au poids, k.
		kilog.			mèt.	mèt.	kilog.	
12	Secs.	3.400	Ressorts de suspension libres; la caisse du wagon éprouvait des oscillations verticales très-sensibles.	1	500	4,6	710	0,209
				2	800	7,8	609	0,179
				3	300	10,0	570	0,168
				4	1.600	14,3	492	0,145
14	Très-secs.	3.400	*Id.*	1	300	7,9	839	0,247
				2	300	13,0	758	0,223
				3	1.000	18,0	690	0,203
				4	400	22,0	637	0,187
16	Mouillés.	3.400	*Id.*	1	1.000	8,8	930	0,111
				2	750	20,8	698	0,083
21	Secs, mais ayant été mouillés le matin.	3.400	*Id.*	1	400	6,0	704	0,207
				2	400	8,0	640	0,188
				3	450	9,2	615	0,181
				4	500	12,2	570	0,168
				5	700	20,0	465	0,137
Id.	*Id.*	6.450	*Id.*	6	500	9,0	1.092	0,169
31	Secs.	3.400	Ressorts de suspension calés; la caisse du wagon n'éprouvait plus d'oscillations verticales sensibles.	1	300	7,25	700	0,206
				2	850	10,8	604	0,178
				3	950	15,7	541	0,159
				4	1.300	20,0	464	0,136

Aux nombres précédents, j'ajouterai les suivants, que j'ai extraits de 2 diagrammes d'expériences semblables, faites postérieurement par M. J. Poirée, diagrammes que M. Poirée a bien voulu me communiquer :

11 déc. 1851	Secs.	3.400	Ressorts de suspension libres.	1	800	8,8	581	0,171
				2	3.900	15,5	469	0,138
				3	1.200	20,0	426	0,125
				4	1.200	22,0	381	0,112
		7.125	*Id.*	5	450	5,0	1.230	0,173
				6	700	9,0	1.118	0,157
				7	450	16,0	962	0,135
				8	3.300	19,15	850	0,119

Leur représentation graphique.

9. Pour tirer, des résultats expérimentaux obtenus par M. J. Poirée, les conséquences précises qui peuvent en découler, j'ai commencé par en faire le tracé graphique, en prenant pour abscisses les différentes vitesses de marche dans les diverses observations, et, pour ordonnées, les rapports correspondants du tirage au poids. J'ai obtenu ainsi autant de points isolés que d'observations. Auprès de chacun de ces points, j'ai inscrit la date et le numéro de l'observation correspondante.

Premières conséquences ressortant de cette représentation.

Mode de variation du coefficient de glissement avec l'état des rails et avec la vitesse.

10. A la première inspection du tracé graphique ainsi fait (*fig.* 25, Pl. III), on reconnaît que les quatre points correspondant aux quatre observations du 14 juillet, faites sur rails très-secs et les seules faites sur pareils rails, toutes quatre avec un wagon de 3.400 kil., mais à des vitesses diverses, accusent évidemment une courbe descendante, simple, légèrement convexe vers l'axe des abscisses (au moins dans les limites de vitesse entre lesquelles les observations ont été faites), courbe dont la hauteur au-dessus de l'axe des abscisses résulte nécessairement de l'état des rails, et dont la forme résulte, au moins principalement, de la loi de variation du coefficient de glissement avec la vitesse.

11. Au contraire, les points, au nombre de vingt-deux, correspondant aux observations faites sur rails estimés secs, ne peuvent appartenir, même en faisant la part des petites erreurs et écarts admissibles, à une courbe unique, comme la précédente.

Il est vrai que toutes ces vingt-deux observations n'ont pas été faites exactement dans les mêmes conditions de poids et de suspension; mais dix-sept d'entre elles l'ont été avec le même wagon de 3.400 kil., comme celles du 14 juillet, et, sur ces dix-sept, treize l'ont été en outre dans les mêmes conditions de suspension

(ressorts libres) ; et pourtant les treize points correspondants :

$12_1, 12_2, 12_3, 12_4 - 21_1, 21_2, 21_3, 21_4, 21_5 - 11_1, 11_2, 11_3, 11_4$

ne peuvent pas être regardés comme appartenant sensiblement à une même courbe.

La raison ne peut en être que dans une certaine différence de l'état des rails dans ces diverses observations.

Et en effet, s'il est clair que, le 14 juillet, les rails très-secs, c'est-à-dire à leur extrême limite de sécheresse, devaient présenter un état à très-peu près identique dans les 4 observations de ce jour (et qu'il devait aussi en être de même le 16 juillet, jour où les rails étaient mouillés), il n'est pas moins clair que, les jours où les rails étaient simplement secs, c'est-à-dire à un état intermédiaire pas très-bien défini, ils devaient présenter des différences plus ou moins notables d'un jour à l'autre, et même d'une heure à une autre de la même journée, et d'un point de la ligne à un autre.

12. Cela posé, les quatre observations du 31 juillet, faites avec le même wagon de 3.400 kil., mais dans des conditions de suspension différentes (ressorts calés), sur des rails également estimés secs, présentent avec les treize résultats précédents des écarts de même ordre que ces treize résultats entre eux, sans faire ressortir, par conséquent, aucune influence évidente du mode de suspension des wagons sur la valeur du coefficient de glissement correspondant à chaque vitesse (1).

Le mode de suspension des wagons est sans influence bien marquée sur la valeur moyenne du coefficient de glissement.

13. Enfin les résultats de l'observation du 21 juillet, avec le wagon de 6.450 kil., et des observations du 11 décembre, avec le wagon de 7.125 kil., sur rails encore estimés secs, ne mettent non plus en évidence, au moins d'une manière suffisamment marquée et certaine, aucune influence de la valeur absolue du poids

Il en est de même du poids absolu des wagons.

---

(1) Ce qui est d'ailleurs très-naturel et très-facile à concevoir et à admettre.

frottant sur celle du coefficient de frottement, attendu que les écarts que ces résultats présentent avec ceux des autres observations faites sur rails secs, avec un poids différent, sont toujours, dans leur ensemble, de même ordre que ceux présentés par ces derniers entre eux.

Premières données sur la loi de variation du coefficient de glissement des wagons sur les rails.

14. Il ressort donc de ce premier examen et de cette première discussion des résultats expérimentaux obtenus par M. J. Poirée que :

1° La loi de la proportionnalité du frottement de glissement à la pression qui s'exerce entre les surfaces frottantes paraît régir encore, au moins *sensiblement*, le phénomène du glissement *direct* des wagons sur les rails, dans les conditions *nouvelles* des expériences de M. Poirée ;

2° Le rapport de l'intensité du frottement de glissement des wagons, sur les rails, au poids de ces wagons, paraît être, au moins *sensiblement*, indépendant du mode de suspension des wagons ;

3° Ce rapport est bien évidemment variable, non-seulement avec l'état des rails, mais encore avec la vitesse du mouvement, la loi de sa variation avec cette vitesse étant représentée par une courbe descendante, convexe vers l'axe des vitesses, au moins pour toutes les vitesses comprises entre 4 et 22 mètres par seconde, courbe dans l'équation de laquelle entre un paramètre de valeur variable avec l'état précis des rails.

Condition rationnelle que doit remplir cette loi.

15. Cela reconnu, il est tout à fait rationnel d'admettre que, pour des vitesses croissant de plus en plus, cette courbe doit continuer à s'abaisser de plus en plus vers l'axe des vitesses, sans pourtant jamais passer en dessous, ni même l'atteindre, autrement qu'à l'infini peut-être ; c'est-à-dire que cette courbe doit être asymptote, soit de l'axe des vitesses lui-même, soit d'une parallèle à cet axe, mais expressément située au-dessus

de lui. D'un autre côté, il est certain que cette courbe vient rencontrer l'axe des ordonnées à une hauteur finie.

Hypothèse à laquelle cond[uit] cette conditio[n]

La courbe la plus simple qui satisfasse aux conditions précédentes est l'arc d'hyperbole, dont l'équation est

$$\frac{f}{p} = \gamma + \frac{k - \gamma}{1 + av},$$

dans laquelle :

γ serait l'ordonnée de l'asymptote parallèle à l'axe des vitesses, c'est-à-dire la valeur limite inférieure vers laquelle tendrait le coefficient du frottement de glissement à mesure que la vitesse deviendrait de plus en plus grande;

k serait l'ordonnée à l'origine de la courbe, c'est-à dire la valeur limite supérieure vers laquelle tendrait le coefficient du frottement de glissement à mesure que la vitesse deviendrait de plus en plus petite.

Les valeurs de γ, de k, et aussi de a, ne pouvant d'ailleurs varier qu'avec l'état de la voie.

Il est donc naturel de penser que le rapport de l'intensité du frottement de glissement *direct* des wagons sur les rails, au poids de ces wagons, doit probablement être représenté par une expression de la forme précédente.

Essai de vérificatio[n] de cette hypothè[se] et de détermination précise de la l[oi]

16. Voyons si, en effet, une pareille expression peut rendre un compte satisfaisant des résultats expérimentaux obtenus par M. J. Poirée, et si ces résultats permettent de déterminer, d'une manière acceptable, pour les différents états pratiques des voies ferrées, les trois éléments qui entrent dans la constitution de cette expression.

Pour déterminer les valeurs de ces trois éléments qui correspondraient à un certain état des rails, il suffirait d'avoir les résultats de trois observations faites sur rails à cet état, mais à la condition d'être bien sûr de la parfaite exactitude de ces ré-

sultats et de la parfaite identité de l'état des rails dans les trois observations. Or, c'est ce dont on ne peut jamais être tout à fait sûr ; et c'est précisément pour remédier aux petites inexactitudes, qui entachent toujours plus ou moins toutes les données et résultats des observations expérimentales (surtout de cette nature), qu'il est nécessaire d'avoir un plus grand nombre d'observations, remplissant d'ailleurs toutes, à peu de chose près (à défaut d'une rigueur impossible), la double condition précédente, de manière que leurs petites inexactitudes (inévitables), en se contrebalançant entre elles, puissent se corriger l'une par l'autre.

1° Dans le cas de rails très-secs.

17. Les observations faites sur rails très-secs, le 14 juillet, remplissent l'ensemble des conditions nécessaires pour permettre d'en déduire les valeurs numériques des coefficients de l'expression, dans un cas limite. En effet, les rails devaient être, dans toutes ces observations, à très-peu près exactement au même état, et l'on est en droit de regarder les résultats de toutes ces observations comme devant être à très-peu près exacts. Ces observations ne sont, il est vrai, qu'au nombre de quatre seulement; mais elles conduisent, groupées trois par trois, ou combinées entre elles de diverses autres manières, à des résultats assez concordants pour qu'on puisse regarder la moyenne de ces résultats comme devant être l'expression précise de la vérité. Or cette moyenne est

$$\gamma = 0, \quad k = 0{,}31, \quad a = 0{,}03.$$

Loi correspondant à ce cas.

On peut donc dire que l'on a, sur rails très-secs,

$$\frac{f}{p} = \frac{0{,}31}{1 + 0{,}03.v}.$$

Il est nécessaire, pour bien établir l'exactitude de cette formule, de montrer que, résultat moyen des quatre observations faites sur rails très-secs, elle rend compte en même temps, sans trop d'écart, de chacune de ces quatre observations, individuellement : or, c'est ce qu'il est facile de reconnaître

en calculant la valeur de $\frac{f}{p}$ donnée par cette formule pour chacune des quatre expériences du 14 juillet et en la comparant à celle observée. On trouve en effet ainsi :

Dans les 4 expériences :	Nos 1	2	3	4
Valeur calculée. . . .	0,251	0,223	0,201	0,187
Valeur observée. . . .	0,247	0,223	0,203	0,187
Différence.	+0,004	0	—0,002	0
Différence moyenne.	+0,0005			

On ne peut assurément désirer une concordance plus satisfaisante, et l'on voit bien que la formule précédente peut être admise comme représentant, avec le plus de simplicité possible et en même temps avec une grande exactitude (au moins dans les limites pratiques de la vitesse sur les chemins de fer), la valeur du coefficient de frottement des roues de wagons glissant sur rails très-secs.

18. La courbe représentative de cette formule est un arc d'hyperbole asymptote de l'axe même des vitesses.

Dès lors, comme on ne peut admettre que les courbes représentatives correspondant aux rails moins secs ou mouillés, courbes situées entre la précédente et l'axe des abscisses, dans les limites pratiques de la vitesse, puissent couper quelque part la courbe précédente, pour cheminer ensuite au-dessus d'elle, il est clair qu'elles doivent être également asymptotes de l'axe même des vitesses, et dès lors être représentées aussi par une équation de la forme simple, *Conséquence qui en résulte pour les autres cas.*

$$\text{(A)} \qquad \frac{f}{p} = \frac{k}{1 + a.v}.$$

19. Cela posé, deux observations, faites sur rails à un état certainement identique, et sur la parfaite exactitude desquelles on pourrait compter, suffiraient pour déterminer les valeurs simultanées de k et de a correspondant à cet état des rails.

2° Dans le cas de rails mouillés.

Or, de même que les rails qui ont pu être dits très-secs, de même les rails mouillés peuvent être regardés comme ayant été exactement (ou au moins à très-peu près) au même état; et nous avons précisément deux observations sur pareils rails (16 juillet).

Les résultats obtenus dans ces deux observations conduiraient aux valeurs simultanées suivantes de k et de a,

$$k = 0,147, \quad a = 0,037.$$

Mais, comme les observations du 16 juillet ne sont qu'au nombre de deux seulement, on n'a point pour elles, comme pour les quatre observations du 14, la garantie d'exactitude fournie par une disposition régulière sur une même courbe simple, et il est permis de penser qu'elles peuvent n'avoir pas été, au moins toutes deux à la fois, d'une précision absolue; on peut croire que la différence, légère d'ailleurs et de peu d'importance, qui se manifeste entre la valeur (0,037) de a, résultant des deux observations du 16 juillet, et sa valeur (0,03) résultant des quatre observations, plus certainement exactes, du 14, tient à cette cause; d'autant plus que si l'on admet un moment que la véritable valeur de a, sur les rails mouillés du 16 juillet, soit exactement la même (0,03) que sur les rails très-secs du 14, la valeur moyenne de k, résultant alors de l'ensemble des deux observations du 16, étant 0,14, les valeurs simultanées (0,03 et 0,14) de a et de k, introduites dans la formule (A), donnent, aux vitesses des deux expériences du 16 juillet, pour les valeurs de $\frac{f}{p}$ dans ces deux expériences, 0,111 et 0,086, valeurs dont l'accord avec celles effectivement observées est bien assez satisfaisant.

Quoi qu'il puisse donc en être, réellement et théori-

quement, de la variabilité possible de a avec l'état des rails, il est de toute évidence que, *pratiquement*, sa variation, à supposer qu'elle ait lieu effectivement, ne saurait avoir aucune importance, et que dès lors il convient d'adopter pour a, sur tous les rails, une valeur constante égale à 0,03, qui est celle déterminée avec le plus de certitude par les expériences de M. J. Poirée.

Dès lors la formule à adopter pour représenter le coefficient du frottement des roues de wagons, glissant directement sur rails mouillés, est

Loi correspondant à ce cas.

$$\frac{f}{p} = \frac{0,14}{1 + 0,03.v}.$$

20. Restent les observations faites sur rails estimés secs.

3° Dans le cas où les rails peuvent être estimés secs.

Elles sont au nombre de vingt-deux; mais elles n'ont certainement pas été faites toutes sur rails également secs (11), et l'on ne peut même pas les classer en groupes d'observations ayant rempli cette condition, car on n'en peut distinguer seulement deux, parmi elles, dont on puisse affirmer, *à priori*, qu'elles ont été faites sur rails exactement au même état. On ne peut donc en tirer directement, comme j'ai pu le faire des observations sur rails très-secs et sur rails mouillés, un seul couple de valeurs simultanées de k et de a.

Mais, de ce qui a lieu sur rails très-secs et sur rails mouillés, on peut conclure que, sur rails à un état intermédiaire, a doit encore être admis sensiblement égal à 0,03; et dès lors à chaque observation correspond une valeur particulière de k, égale à $\frac{f}{p}(1 + 0,03.v)$. Toutes les diverses valeurs de k, fournies ainsi par les vingt-deux observations faites sur rails qui ont pu être esti-

més secs, sont comprises entre 0,25 et 0,19, et ont pour moyenne 0,22.

Loi correspondant à ce cas.

On peut donc dire que, sur rails moyennement secs, la formule représentative du coefficient de glissement direct des wagons est

$$\frac{f}{p} = \frac{0,22}{1 + 0,03.v}.$$

Le numérateur de cette expression pouvant s'élever jusqu'à 0,25 ou s'abaisser jusqu'à 0,19, suivant que les rails sont plus ou moins secs.

Loi générale du glissement direct des wagons sur les rails.

21. On voit donc, en définitive, que l'on peut conclure des expériences exécutées en 1851 par M. J. Poirée, que

L'intensité de la résistance opposée au mouvement par le frottement des roues de wagons, glissant directement sur les rails des voies ferrées, doit être représentée par la formule

$$f = \frac{p.k}{1 + 0,03.v},$$

dans laquelle

p représente la pression qu'exercent les roues sur les rails;

v, la vitesse de marche du wagon (en mètres par seconde);

k, un coefficient numérique, dont la valeur dépend uniquement de l'état des rails, et qui doit être pris égal à

0,31 quand les rails sont très-secs,

0,22 quand les rails sont moyennement secs,

0,14 quand les rails sont mouillés,

Et à des valeurs intermédiaires quand les rails sont à un état intermédiaire.

Confirmation de la formule déduite des expériences de M. J. Poirée *par d'autres expériences exécutées en* 1856 *par MM.* Garella *et* Bochet.

22. Je dois commencer par dire que nos expériences n'ont pas été entreprises dans le but *préconçu* de vérifier une loi *quelconque* du frottement de glissement, mais en vue de déterminer les espaces précis dans lesquels se produit l'arrêt des diverses sortes de convois de chemins de fer, sous l'action d'un plus ou moins grand nombre de freins, dans des circonstances défavorables à la rapidité de l'arrêt, afin d'en déduire ce qu'il est indispensable de mettre de freins dans les convois, question posée aux ingénieurs du contrôle des chemins de fer par S. E. le ministre des travaux publics (1). **But des expériences exécutées en 1856 par MM. Garella et Bochet.**

23. En conséquence nos expériences ont été faites sur de véritables convois, composés chacun d'une machine, de son tender et d'un certain nombre de wagons, parmi lesquels plusieurs étaient armés d'un frein ordinaire. **Relation de ces expériences.**

Le poids de chaque véhicule (lesté et monté par une ou plusieurs personnes) était exactement connu.

Pour chaque expérience, on se mettait en marche, et, quand la vitesse était bien établie, le mécanicien sifflait aux freins. Aussitôt il fermait son régulateur, et les garde-freins, qui devaient serrer leur frein, le faisaient sans retard; c'étaient tantôt les uns, tantôt les autres, suivant des conventions faites d'avance, de manière à varier les conditions des expériences. Le train perdait alors graduellement sa vitesse et finissait par s'arrêter tout à fait. Depuis le moment du départ, l'instant précis du passage devant chaque poteau télégraphique était lu sur un chronomètre et noté, ainsi que le numéro et la lettre indicative du poteau. On choisissait, pour siffler aux freins,

---

(1) Il nous était indispensable, pour notre expérimentation, de pouvoir disposer de trains spéciaux, composés et conduits exprès. La compagnie de l'Ouest s'est empressée, avec une obligeance qui lui est du reste habituelle, de nous les fournir, ainsi que tous les moyens d'observation qui nous étaient nécessaires. Nos expériences ont d'ailleurs été faites avec le concours personnel de M. le chef du mouvement Férot, assisté de M. Banès, inspecteur de la compagnie, le 6 novembre 1856, sur la ligne de Caen, près de la station de Mantes.

le moment du passage de la machine devant un poteau, que l'on notait. L'instant précis de l'arrêt était lu sur le chronomètre et noté; le point exact de la voie où il se produisait était relevé par rapport aux poteaux voisins.

Tracé graphique auxiliaire.

Le profil de la voie étant d'ailleurs connu avec la position exacte de chaque poteau télégraphique, on voit qu'on avait tous les éléments nécessaires pour dresser, par points, un graphique de la marche du train dans chaque expérience, en prenant le temps pour abscisse et, pour ordonnée, le chemin parcouru.

24. Ce graphique ayant été dressé avec soin et précision, sur une assez grande échelle, on a pu tracer exactement, pour chaque expérience, la courbe *continue et régulière* déterminée évidemment par l'ensemble des points isolés correspondant à cette expérience, et obtenir ainsi la *courbe de marche* du train (*voir* Pl. III, *fig.* 26, où trois de ces courbes, avec leurs éléments déterminatifs, ont été reproduites, sur une petite échelle, uniquement dans le but de donner une idée du procédé et des résultats qu'il fournit).

Conséquences déduites de ce tracé. 1° Détermination de la vitesse.

La tangente à cette courbe, tirée avec soin, en tel point que l'on veut d'ailleurs, donne le moyen de déterminer, avec une assez grande approximation, la vitesse de la marche à un moment quelconque, mais surtout au moment où l'on sifflait aux freins, attendu qu'au point de la courbe correspondant à ce moment, où la vitesse était bien établie et restait sensiblement constante depuis quelque temps, ayant crû jusque-là pour commencer à décroître bientôt après, la courbe de marche présente une assez longue inflexion, très-favorable à la précision du tracé de sa tangente en ce point.

25. L'examen des courbes de marche de nos convois et de leur tangente au point correspondant au coup de sifflet, met tout d'abord en évidence le fait suivant, qui n'est assurément pas sans intérêt pour la question des freins, et dont j'aurai d'ailleurs à tirer parti.

2° Détermination du temps employé à serrer les freins.

La vitesse de nos convois n'a pas décru *sensiblement*, à la suite du coup de sifflet, pendant un temps qui a varié de 2″ à 6″, temps qui a dû être à peu près celui employé au serrage des freins, et qui a été en moyenne de 4″ à 5″; mais il faut noter que les garde-freins étaient

préparés et attentifs au coup de sifflet, et qu'ils serraient sans perdre de temps.

26. On voit, par tout ce qui précède, qu'on a pu déterminer, avec une grande approximation : Éléments fournis par l'expérimentation.

1° La vitesse du train, V, au commencement de la phase de son ralentissement;

2° Le chemin parcouru, L, et le temps, T, mis à parcourir ce chemin, depuis le commencement du ralentissement *sensible*, c'est-à-dire du glissement des roues enrayées par les freins, jusqu'à l'arrêt définitif et complet.

On connaissait d'ailleurs le poids total, P, de la masse en mouvement; le poids p de la masse glissant sur les rails par l'intermédiaire des roues enrayées par les freins; par conséquent le rapport $\frac{p}{P}$, que je désignerai par q. On connaissait, en outre, le nombre n des véhicules du train; enfin le nombre m des millimètres par mètre qu'avait la pente de la partie de voie sur laquelle s'est faite chaque expérience (1).

27. Pendant toutes nos observations, le temps a été calme. Il était d'ailleurs beau, pur et sec; mais il faut noter qu'on était en novembre, et qu'il y avait eu le matin une rosée abondante, dont les rails étaient encore un peu humides pendant la première série de nos expériences, faite entre 10 heures et 11 heures; ils n'ont été secs, au moins *sensiblement*, que pendant nos dernières expériences, faites dans l'après-midi (une deuxième série entre 1 heure et 2 heures, enfin une troisième série entre 3 heures et 4 heures). Circonstances atmosphériques.

---

(1) Toutes nos expériences ont été faites sur des *pentes* de 8 et de 9 millimètres par mètre, en raison du but même que nous nous proposions (22).

28. Les résultats de celles de nos expériences dont il est permis de tenir compte comme ayant bien réussi, c'est-à-dire comme n'ayant présenté aucune circonstances de nature à jeter de l'incertitude sur les appréciations, se trouvent consignés dans le tableau suivant :

Tableau indicatif des résultats obtenus.

SÉRIE.	ÉTAT des rails.	Nombre des véhicules, n.	POIDS total du train P.	Numéros d'ordre des expériences.	POIDS glissant p.	Rapport du poids glissant au poids total $\frac{p}{P}$ ou Q.	Pente de la voie, m en millimètres par mètre.	Vitesse initiale, V en mètres par seconde.	Parcours effectué en glissant, L.	Temps mis à effectuer ce parcours, T.
			kilogr.		kilogr.		mm.	mèt.	mèt.	sec.
I. Entre 10 et 11 h. du matin.	Encore assez humides de la rosée du matin.	18	262.870	1	37.150	0,141	9	8,5	246	55,5
				2	62.090	0,236	9	9,9	172	33,5
				3	62.090	0,236	8	9,3	149	31,0
				4	47.420	0,180	8	9,3	211	43,0
II. Entre 1 h. et 2 h. après-midi.	Assez secs.	13	106.570	5	25.050	0,235	9	11,25	214	36,5
				6	35.320	0,331	9	10,0	112	21,5
				7	35.320	0,331	9	11,7	149	24,5
				8	35.320	0,331	9	10,7	138	23,0
				9	35.320	0,331	8	10,8	135	22,0
				10	45.590	0,428	8	10,4	95	16,0
III. Entre 3 h. et 4 h.	Secs.	9	87.340	11	37.000	0,424	8	13,5	146	20,5
				12	47.270	0,541	9	13,75	118	16,0
				13	40.020	0,459	9	16,0	190	22,5

Conséquences de ces résultats.

29. Voyons maintenant quelles conséquences on peut tirer de ces résultats, relativement à la loi du glissement.

Expression de la résistance au mouvement dans nos expériences.

La résistance produite par le glissement, sur les rails, des roues enrayées par les freins n'était pas la seule force qui agît sur nos convois; il y avait en même temps la résistance au roulement des roues qui n'étaient pas enrayées, la résistance produite par le jeu du mécanisme de la locomotive (sans pression de vapeur); enfin, comme nous avons toujours descendu une pente, la gravité produisait une force active en sens contraire des résistances (1).

---

(1) On trouvera certainement que, au point de vue de la vérification de la loi du glissement, le concours de toutes ces forces étrangères était inutile et même nuisible; cela est in-

La résistance totale (en kilogrammes), éprouvée par nos convois, à un moment quelconque de leur ralentissement, pouvait donc être représentée par l'expression suivante, dans laquelle v représente la vitesse (en mètres, par seconde) du convoi à ce moment :

f	Résistance produite par le glissement des roues enrayées ;
$+(0{,}33+0{,}06\,n)\,v^2$	Résistance de l'air sur l'ensemble du convoi (1).
$+(P-p)(0{,}0027+0{,}0003\,v)$.	Résistance au roulement des roues tournantes (2).
$+\,P.0{,}0002.v$	Résistance produite par le jeu du mécanisme de la locomotive (3).
$-\,P.m.0{,}001$	Effet de la gravité.

---

contestable : mais, ainsi que je l'ai dit (22), nos expériences n'avaient pas été organisées en vue de vérifier la loi du glissement. Au surplus on verra, par ce qui va suivre, que toutes les forces étrangères n'exerçaient qu'une action minime, auprès de celle du glissement, dont le mode d'intervention ressortira par suite, des résultats que nous avons obtenus, aussi clairement que s'il avait agi seul.

(1) Cette résistance doit en effet être représentée (d'après M. de Pambour), par

$$0{,}005\,[s+0{,}9\,(n-1)].\,v^2$$

v étant la vitesse (en kilomètres à l'heure), s la surface de front (en mètres carrés). En remplaçant v par $v.3{,}6$ et s par 6 (surface de front de nos convois), on obtient bien

$$(0{,}33+0{,}06\,n)..v^2$$

(2) La résistance totale (en kilogrammes) qu'oppose à la traction un convoi, dont toutes les roues tournent, peut (d'après Wyndham Harding, dont la formule est généralement considérée comme assez exacte) être représentée (après transformation en mesures françaises) par

$$Q\,(2{,}72+0{,}094.v)+0{,}00484.s.v^2$$

Q étant le poids du convoi (en tonnes), v sa vitesse (en kilomètres à l'heure), s sa surface de front (en mètres carrés).

En appliquant cette formule à la portion de nos convois dont les roues tournaient, en faisant abstraction de son dernier terme, qui représente la résistance de l'air (dont nous venons de tenir compte pour la totalité des convois), en remplaçant v par $v.3{,}6$ et Q par $(P-p)$, poids de la portion de nos convois dont les roues tournaient, mais exprimé en kilogrammes au lieu d'être exprimé en tonnes, on obtient bien (avec une approximation suffisante et convenable), pour la résistance au roulement des roues tournantes

$$(P-p)\,(0{,}0027+0{,}0003.v).$$

(3) Sans pression de vapeur, le régulateur étant fermé.

Cette expression se déduit facilement, comme suffisamment approchée, de ce qui est dit dans le *Guide du mécanicien*, de MM. Le Chatelier, etc. (page 345).

30. Que la résistance produite par le glissement, sur les rails, des roues enrayées par les freins soit ou non variable avec la vitesse, et, si elle l'est effectivement, que ce soit suivant telle loi ou telle autre, la résistance totale éprouvée par le convoi (je la désignerai par R) était toujours une fonction de la vitesse v; soit $\varphi(v)$; et l'on avait à chaque instant, d'après le principe de la puissance vive,

Équation du mouvement.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{P}{g}\cdot d(v^2) = -R.dL = -\varphi(v).dL,$$

Expression dans laquelle j'ai négligé, à dessein, la variation de la puissance vive de *rotation* des roues et essieux *tournants*, parce que (il est facile de le reconnaître et je ne m'y arrête pas) elle était effectivement négligeable auprès de la variation de la puissance vive de *translation* de la *masse entière* du convoi.

Expressions : 1° Du parcours effectué en glissant; 2° Du temps mis à effectuer ce parcours.

On en tire :

$$L = \frac{P}{g}\int_0^V \frac{v}{\varphi(v)}dv$$

et aussi (par suite de la relation... $dL = v.dT$),

$$T = \frac{P}{g}\int_0^V \frac{1}{\varphi(v)}dv,$$

L'expression des $\int$ qui entrent dans ces formules dépend de celle qui doit être adoptée pour la représentation de la résistance produite par le glissement, sur les rails, des roues enrayées par les freins.

Les résultats de nos expériences impliquent l'inexactitude de la formule, accréditée, du § 1.

31. Supposons d'abord que cette résistance puisse être simplement représentée par la formule accréditée.... $f = p.k.$

Alors on aurait

$$\varphi(v) = \underbrace{[pk + (P-p).0,0027 - P.m.0,001]}_{Q} \underbrace{+}_{+} \underbrace{[P.0,005 - p.0,003]}_{a}.\underbrace{v + }_{v+}\underbrace{[0,33 + 0,06.n]}_{b}.\underbrace{v^2.}_{v^2.}$$

Avec cette expression de $\varphi(v)$, les $\int$ ci-dessus sont intégrables rigoureusement; seulement leurs expressions sont transcendantes et trop compliquées pour qu'on puisse en rien tirer; mais elles peuvent être remplacées, avec une très-grande approximation, par les expressions suivantes, qui sont algébriques et très-simples :

$$\int_0^V \frac{v}{\varphi(v)}\, dv \qquad \text{par} \qquad \frac{\frac{V^2}{2}}{Q + a\frac{V}{2} + b\frac{V^2}{3}}.$$

$$\int_0^V \frac{1}{\varphi(v)}\, dv \qquad \text{par} \qquad \frac{V}{Q + a\frac{V}{2} + b\frac{V^2}{3}}.$$

En effet, si le dénominateur commun $\varphi(v)$, des expressions sous le signe $\int$, au lieu de varier avec v, était constant (égal à R), la valeur de la première $\int_0^V$ serait égale à $\frac{1}{R} \cdot \frac{V^2}{2}$, et celle de la seconde $\int_0^V$ serait égale à $\frac{1}{R} \cdot V$; or, ce dénominateur commum, sans être précisément constant, ne varie pas beaucoup, entre les limites des intégrales, et l'on peut dès lors, sans erreur notable sur la valeur totale de ces intégrales, considérer ce dénominateur comme constamment égal à un nombre moyen, déterminé par la considération suivante : les valeurs successives de ce dénominateur sont représentées par les ordonnées successives d'un arc de courbe dont l'ordonnée moyenne, R, est évidemment telle que l'on a

$$R.V. \ldots = \ldots \int_0^V \varphi(v).dv. = Q.V + a\frac{V^2}{2} + b\frac{V^3}{3}$$

(Rectangle de base V et de hauteur R). | (Aire de l'arc de courbe de base V).

Et par conséquent $R = Q + a\frac{V}{2} + b\frac{V^2}{2}$.

On voit donc que les deux $\int_0^V$ peuvent bien être remplacées, chacune par l'expression que j'ai adoptée.

Dès lors on peut écrire

$$L = \frac{V^2 . 50}{D}, \qquad T = \frac{V . 100}{D}$$

avec $D = k.q.1000 + (1-q).3 - m + V(0,25 - q.0,15) + V^2\left(\frac{110 + 20.n}{P}\right)$.

32. Dans ces expressions, tout est connu, excepté k seulement, pour chacune de nos expériences. On en peut donc tirer, pour chaque expérience, deux valeurs de k, fournies par les résultats que nous avons obtenus, l'une fournie par la valeur obtenue pour L, l'autre fournie par la valeur obtenue pour T ; je les désignerai par k_L et k_T.

Il est évident que ces deux valeurs doivent être identiques, c'est-à-dire que leur rapport $\frac{k_L}{k_T}$ doit être égal à 1, dans chaque expérience considérée isolément, bien que leur valeur commune puisse varier un peu d'une expérience à l'autre, en raison de légères différences dans l'état précis des rails, différences possibles et même probables d'une expérience à l'autre, certaines même d'une série à l'autre (27, 28).

Il résulterait d'ailleurs, des expressions ci-dessus de L et de T, qu'on devrait avoir dans chaque expérience :

$$\frac{L}{T} = \frac{V}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{L}{T} \Big/ \frac{V}{2} = 1.$$

Or les résultats de nos expériences (28) donnent :

Dans les expériences numéros	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\frac{V}{2} =$	4,25	4,95	4,65	4,65	5,63	5,00	5,85	5,35	6,40	6,20	6,75	6,88	8,00
$\frac{L}{T} =$	4,43	5,13	4,81	4,91	5,86	5.21	6,08	6,00	6,13	5,94	7,14	7,38	8,44
D'où $\frac{L}{T} \Big/ \frac{V}{2} =$	1,042	1,036	1,034	1,056	1,041	1,042	1,039	1,121	1,135	1,142	1,058	1,073	1,055

Et, avec les éléments fournis par ces mêmes résultats (28), on tire des expressions ci-dessus de L et de T :

Dans les expériences numéros	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$K_T =$	0,138	0,144	0,142	0,139	0,147	0,155	0,157	0,154	0,159	0,159	0,163	0,167	0,163
$K_L =$	0,134	0,139	0,138	0,132	0,142	0,149	0,151	0,150	0,153	0,153	0,152	0,157	0,155
D'où $\frac{K_T}{K_L} =$	1,030	1,036	1,029	1,053	1,035	1,040	1,040	1,027	1,040	1,040	1,072	1,064	1,052

Quoique les rapports $\frac{L}{T} \Big/ \frac{V}{2}$ et $\frac{k_T}{k_L}$, qui devraient être égaux à 1 si l'hypothèse qui nous a servi de point de départ était exacte, en diffèrent, dans toutes les expériences sans exception, un peu trop pour que cette circonstance puisse être mise purement et simplement sur le compte des erreurs d'observation, cependant on n'en pourrait trop rien conclure encore s'il n'était à remarquer qu'ils en diffèrent *toujours dans le même sens*, et que les valeurs de $\frac{L}{T}$ et de k_T sont *toutes* plus fortes que les valeurs correspondantes de $\frac{V}{2}$ et de k_L ; ce qui est l'indice certain d'une *cause d'inexactitude constante.*

Or, il faut remarquer que, lors même que les forces étrangères au glissement, qui ont contribué avec lui à produire l'arrêt de nos convois, ne seraient pas très-exactement représentées par les formules que j'ai adoptées pour elles, il n'en resterait pas moins vrai, du moment que le glissement serait représenté par la formule $f = pk$, que l'on devrait avoir $\frac{L}{T} = \frac{V}{2}$ et $k_T = k_L$.

Il est donc évident que la formule.... $f = pk$ n'est pas suffisamment exacte, au moins dans les conditions de nos expériences.

Ils sont au contraire tout à fait compatibles avec l'exactitude de la formule nouvelle du § 21.

33. Voyons maintenant si, au contraire, la formule

$$f=\frac{pk}{1+0{,}03v},$$

que j'ai déduite des expériences exécutées en 1851 par M. J. Poirée, dans des circonstances de glissement tout à fait semblables à celles de nos expériences, conduit à des conséquences plus en harmonie avec les résultats que nous avons obtenus en 1856.

En admettant cette formule, les expressions de T et de L (30) deviennent

$$T=\frac{P}{g}\int_0^V\frac{1+0.03v}{Q+a'v+b'v^2+c'v^3}\,dv,$$

$$L=\frac{P}{g}\int_0^V\frac{v(1+0.03v)}{Q+a'v+b'v^2+c'v^3}\,dv.$$

Avec $Q=[pk+(P-p).0{,}0027-P.m.0{,}001]$, comme ci-dessus (31),

$a'=[P.0{,}00058-p.0{,}00038-P.m.0{,}00003]$,

$b'=[(0{,}33+0{,}06.n)+P.0{,}000015-p.0{,}000009]$,

$c'=[(0{,}33+0{,}06.n).0{,}03]$.

Ces expressions de T et de L ne sont plus intégrables rigoureusement, d'une manière générale; mais elles peuvent encore être remplacées, avec une très-grande approximation, par les expressions suivantes, algébriques et très-simples :

$$T=\frac{P}{g}.\frac{V+0{,}03\frac{V^2}{2}}{Q+a'\frac{V}{2}+b'\frac{V^2}{3}+c'\frac{V^3}{4}},\quad L=\frac{P}{g}.\frac{\frac{V^2}{2}+0{,}03\frac{V^3}{3}}{Q+a'\frac{V}{2}+b'\frac{V^2}{3}+c'\frac{V^3}{4}}.$$

On est conduit à ces expressions en appliquant au cas actuel le procédé employé dans le cas précédent (31).

On peut donc écrire, par suite,

$$L=\frac{V^2.50+V^3}{D},\qquad T=\frac{V.100+V^2.1,5}{D}$$

avec

$$D=[k.q.1000+(1-q).3-m]+V[0,3-q.0,2-m\ 0,015]+$$
$$V^2\left(\frac{110+20n}{P}+0,005-q.0,003\right)+V^3\left(\frac{2,5+0,45.n}{P}\right).$$

34. De ces expressions se tire, comme première conséquence,

$$\frac{L}{T}=\frac{V}{2}\left(1+\frac{\frac{V}{2}}{100+3\frac{V}{2}}\right)\quad \text{ou}\quad \frac{L}{T}\Big/\frac{V}{2}=1+0,01.\frac{V}{2}\ (1).$$

Ce qui rend tout d'abord parfaitement compte de ce fait, que nous avons reconnu tout à l'heure (32), à savoir que le rapport de $\frac{L}{T}$ à $\frac{V}{2}$, dans toutes nos expériences, sans exception, a été plus grand que 1; et même, si l'on compare les quantités dont ce rapport a surpassé 1, dans nos diverses expériences, à la valeur de $0,01\frac{V}{2}$ dans chacune, on reconnaît de suite que ces quantités en diffèrent généralement très-peu, *tantôt en plus*, *tantôt en moins*, et que leur différence *moyenne* est à peu près insignifiante (elle n'est que de 0,011).

35. Maintenant, si l'on calcule, pour chacune de nos expériences, les valeurs de k_t et de k_L qui résultent des dernières expressions de T et de L (33), on trouve :

(1) En moyenne et sensiblement dans toutes nos expériences.

Dans les expériences numéros	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$K_T =$	0,156	0,164	0,161	0,157	0,171	0,177	0,184	0,180	0,185	0,182	0,195	0,201	0,202
$K_L =$	0,155	0,165	0,162	0,155	0,172	0,178	0,186	0,181	0,183	0,181	0,195	0,199	0,203
D'où $\frac{K_T}{K_L} =$	1,006	0,994	0,994	1,013	0,994	0,994	0,989	0,994	1,011	1,006	1,000	1,010	0,995

On voit que ces valeurs du rapport de k_T à k_L ne diffèrent plus que très-peu de l'unité, *tantôt en plus*, *tantôt en moins*, et que sa valeur *moyenne* se trouve même être exactement 1,000 (1).

36. On remarquera, d'ailleurs, que la valeur de k, résultant, pour chaque expérience, des expressions qui se déduisent de la formule

$$f = \frac{p.k}{1 + 0{,}3v},$$

est bien, — en raison de ce que devait être l'état des rails dans nos trois séries successives d'observations par suite des circonstances atmosphériques que j'ai relatées (27, 28), — en harmonie, pour toutes nos expériences, avec l'échelle de valeurs de k résultant des expériences de M. J. Poirée (21).

Car on peut dire que cette valeur de k a été, sauf de faibles écarts tout à fait admissibles (27, 11, 20), de

0,16 pour la première série de nos observations, faite entre 10 et 11 heures sur rails encore humides de la rosée du matin.

0,18 pour la deuxième série, faite entre 1 et 2 heures, sur rails qui ne devaient pas encore être bien secs, quoiqu'ils ne fussent plus visiblement humides.

0,20 pour la troisième série, faite entre 3 et 4 heures, sur rails qui pouvaient enfin être devenus tout à fait secs, mais secs comme des rails qui viennent de sécher par une journée de novembre (22, note), et non pas secs comme dans les mois d'été,

---

(1) Ce qui, du reste, veut dire seulement que sa différence avec l'unité n'est pas même de l'ordre des millièmes.

où la valeur de k peut s'élever jusqu'à 0,25 et même jusqu'à 0,31, d'après les résultats des expériences de M. J. Poirée, faites en juillet.

37. On peut donc dire que les résultats de nos expériences de 1856 fournissent une confirmation des conséquences que j'ai déduites de ceux obtenus par M. J. Poirée en 1851.

De sorte qu'on peut, il me semble, regarder comme suffisamment établi maintenant que :

1° La loi de glissement représentée par la formule $f = pk$ n'est pas suffisamment exacte, au moins quand il s'agit de wagons glissant directement (1) sur les rails des chemins de fer, avec la vitesse, variable entre des limites très-écartées, dont ils peuvent être animés ;

2° La formule à adopter, pour représenter l'intensité du frottement de glissement, dans ces circonstances, est bien

$$f = \frac{p.k}{1 + 0{,}03\,v}.$$

38. Pour ce qui est des valeurs à donner à k dans cette formule, il convient d'ajouter à ce que j'en ai déjà dit (21), que : Éclaircissements complémentaires qu'ils fournissent sur cette formule.

1° La valeur 0,3 ne paraît devoir être atteinte que sur rails très-secs, comme ils ne peuvent guère l'être que dans les grandes chaleurs de l'été, c'est-à-dire à leur maximum possible de sécheresse ;

2° Dans les autres saisons, les rails les plus secs ne peuvent guère fournir une valeur de k supérieure à 0,25 ;

3° La valeur moyenne de k, correspondant à l'état de sécheresse moyenne des rails (pour toute l'année), doit être admise égale à 0,2 seulement ;

4° Toutes les fois que les rails ont été mouillés ou

(1) C'est-à-dire par l'intermédiaire de leurs roues même, enrayées par le frein ordinaire.

humides, et que, sans l'être encore bien positivement et visiblement, ils n'ont pourtant pas été soumis depuis un temps assez long à une influence suffisamment desséchante, la valeur de k varie de 0,20 à 0,15.

Ces remarques sont importantes, parce que la valeur précise adoptée pour k, dans les applications, exerce une influence considérable sur la précision des résultats obtenus par l'emploi de la formule.

Ces valeurs de k ne conviennent d'ailleurs nécessairement, cela va sans dire, qu'autant que les rails et les bandages des roues continueraient à être en fer, comme ils le sont maintenant : s'ils venaient à être faits en une autre matière (par exemple en acier puddlé, comme on paraît y tendre), les valeurs à adopter pour k pourraient devoir être modifiées (plus ou moins d'ailleurs).

Expériences sur le glissement des wagons sur les rails par l'intermédiaire de sabots en fer, exécutées en 1856 par M. J. Poirée ; conséquences et formule déduites de ces expériences.

39. M. J. Poirée a fait, en mai 1856, sur le chemin de fer de Lyon, des expériences sur la valeur relative du frein Cochot, qui consiste en un sabot de fer qu'un déclanchement instantané laisse tomber sous chaque roue (la roue monte dessus aussitôt, et c'est le sabot qui glisse dès lors sur la voie, et cela immédiatement).

Les résultats de ces expériences n'ont pas été publiés par M. Poirée ; mais il a bien voulu me les communiquer et m'autoriser à en faire usage.

Il m'a semblé qu'on pouvait déduire de ces résultats des conséquences intéressantes et importantes pour la question de la loi du glissement.

Je vais donc relater ces expériences, pour indiquer ensuite les conséquences qui m'ont semblé pouvoir être déduites de leurs résultats.

Relation des expériences exécutées en 1856 par M. J. Poirée.

40. Voici comment les expériences ont été faites :

Un wagon à marchandises, lesté, d'un poids connu, et armé du frein Cochot, était remorqué et mis en vitesse, les sabots

levés, par une locomotive, à laquelle il était attelé de telle manière que, par un déclanchement instantané, ou pouvait, au moment précis qu'on voulait, le dételer, en marche.

A un signal convenu, quand la vitesse était bien établie et notée exactement (par le temps précis mis à parcourir les intervalles, connus, qui séparaient les poteaux télégraphiques devant lesquels on passait successivement), le wagon était dételé et son frein déclanché, instantanément, en un point de la voie qu'on marquait. Les sabots tombaient immédiatement sous les roues, qui montaient dessus aussitôt, et le glissement se produisait de suite. La vitesse du wagon commençait donc immédiatement à se ralentir, pendant qu'au contraire la machine, dont il était devenu indépendant, prenait de plus en plus d'avance sur lui. Le wagon, après un parcours plus ou moins long, s'arrêtait tout à fait, en un point de la voie qu'on relevait avec précision.

On pouvait donc déduire, des notes prises pendant l'opération,

1° La vitesse dont le wagon était animé au moment où son glissement commençait;

2° Le parcours effectué par lui depuis ce moment jusqu'à celui de son arrêt.

L'état des rails était d'ailleurs noté.

En outre des expériences précédentes, faites avec un seul wagon, quelques autres ont été faites, de la même manière, avec ce wagon suivi de 2 et même de 4 wagons à roues libres.

Enfin il a été fait, chaque fois et de la même manière, des expériences comparatives avec le frein ordinaire, substitué au frein Cochot, en vue de reconnaître nettement et sûrement les effets produits par l'un et par l'autre dans les mêmes circonstances. Dans les expériences faites avec le frein ordinaire, les parcours effectués ont été comptés, comme dans les expériences faites avec le frein Cochot, à partir du moment où le signal a été donné de mettre le frein en jeu : or, comme il faut un certain temps (quelques secondes), pour serrer à fond le frein ordinaire et enrayer par lui les roues, il en résulte que les parcours effectués avec le frein ordinaire, se composent, d'abord du chemin fait pendant ce temps, à la vitesse initiale (25), puis

du chemin parcouru depuis le commencement du glissement des roues sur les rails jusqu'à l'arrêt.

Toutes les expériences ont été faites sur palier et par un temps calme.

Tableaux indicatifs de leurs résultats.

41. Voici maintenant quels ont été les résultats obtenus (abstraction faite de ceux qui ont présenté quelque anomalie singulière, plus ou moins explicable d'ailleurs par les circonstances, observées ou non, des expériences).

Expériences avec un seul wagon.

DATE. — Mai 1856.	ÉTAT DES RAILS.	NATURE DU FREIN.	POIDS du wagon p.	Numéros d'ordre des expériences.	VITESSE initiale, V en mètres par seconde.	PARCOURS effectué L.
			kilogr.		mèt.	mèt.
21	Assez secs (temps humide).	Frein Cochot.	7.960	1	6,66	15,0
				2	8,69	26,0
				3	11,11	47,5
				4	14,28	94,0
				5	19,23	182,0
				6	22,22	230,0
		Frein ordinaire.	id.	1	11,76	64,0
				2	15,38	130,0
24	Venant d'être mouillés par la pluie, mais ne l'étant plus sensiblement (temps redevenu beau).	Frein Cochot.	id.	1	4,76	8,0
				2	8,33	25,0
				3	16,66	137,0
				4	20,83	230,0
		Frein ordinaire.	id.	1	5,26	11,5
				2	6,25	17,5
				3	7,15	26,0 (a)
				4	8,33	30,0
				5	12,66	90,0 (a)
				6	14,28	107,5
27	Secs (temps couvert).	Frein Cochot.	8.000	1	7,14	14,0
				2	11,76	51,0
				3	25,00	272,0
		Frein ordinaire.	id.	1	8,69	47,5
				2	12,50	95,0
				3	16,66	147,5
				4	20,00	210,0
				5	22,72	276,0

(a) Dans ces expériences (n[os] 3 et 5), les rails étaient encore couverts de gouttes de pluie visibles.

Expériences avec trois ou cinq wagons dont un seul à frein serré.

DATE — Mai 1856.	NATURE DU FREIN.	POIDS glissant p.	POIDS TOTAL en mouvement P.	$\frac{p}{P}$ ou q.	Numéros d'ordre des expériences.	VITESSE initiale, V en mètres par seconde.	PARCOURS effectué L.
		kilogr.	(3 wagons.)			mèt.	mèt.
21	Frein Cochot.	8.000	23.500[k]	0,34	»	20,00	500
	Frein ordinaire.	*id.*	*id.*	*id.*	»	*id.*	410
24	Frein Cochot.	9.000	(5 wagons.) 39.000	0,23	1 2	16,44 17,25	500 495
	Frein ordinaire.	*id.*	*id.*	*id.*	1 2	15,62 17,36	505 585
27	Frein Cochot.	7.960	(3 wagons.) 22.520	0,353	1 2	16,00 12,50	220 157
	Frein ordinaire.	7.560	*id.*	0,336	»	12,12	180(*a*)

(*a*) Il a été constaté que sur ces 180 mètres il en a été parcouru 70 avant que les roues ne fussent enrayées par le frein (qui a été un peu long à serrer).

42. Les résultats des expériences que je viens de relater établissent tout d'abord que la résistance opposée au mouvement par le frottement de glissement, sur les rails, des sabots (en fer) du frein Cochot est, toutes choses égales d'ailleurs, moins énergique que la résistance opposée au mouvement par le frottement de glissement *direct* des roues enrayées par le frein ordinaire.

Premières conséquences de ces résultats. Le frottement par sabots (en fer) est moins énergique que le frottement direct.

En effet, si on défalque, des parcours effectués avec le frein ordinaire, les chemins parcourus avant le glissement, pendant le temps indispensable au serrage du frein (25), on voit que les parcours, ainsi réduits au seul parcours de glissement, sont nécessairement et toujours plus petits que les parcours (de glissement dès l'origine) effectués avec le frein Cochot dans des circonstances semblables. Le fait est surtout sensible et indubitable aux grandes vitesses, sinon bien net et incontestable à petite vitesse.

Cela n'a, d'ailleurs, rien qui doive étonner; car M. Morin a plusieurs fois observé (dans le cours de ses expériences de

1831-32) que, malgré la loi générale d'indépendance de l'étendue des surfaces frottantes (dès que ces surfaces ont une étendue *bien notable*), — loi qui est ressortie indubitablement des expériences de M. Morin, comme régissant le phénomène du glissement, au moins dans les circonstances où ces expériences ont été faites; — néanmoins le frottement est sensiblement plus énergique quand la surface frottante se réduit à une *arête arrondie*. Or c'est précisément le cas du glissement direct des roues enrayées par le frein ordinaire. Et si la différence d'énergie du frottement, dans ce cas et dans celui du frein Cochot, se prononce davantage dans les expériences de M. Poirée qu'elle ne l'a fait dans celles de M. Morin, c'est que la vitesse de glissement y a été bien plus grande (cette différence paraît être faible en effet à petite vitesse, mais semble grandir à mesure que la vitesse augmente).

43. Il s'ensuit que la formule

$$f = \frac{pk}{1 + 0{,}03 . v},$$

avec les valeurs de k indiquées ci-dessus (21, 38), formule qui convient au cas du glissement *direct* des roues enrayées par le frein ordinaire, doit être modifiée quand il s'agit du glissement des wagons par l'intermédiaire des sabots (en fer) du frein Cochot.

Le frottement par sabots (en fer) diminue encore à mesure que la vitesse augmente et même plus rapidement que le frottement direct.

44. On reconnaît d'ailleurs facilement que, dans ce dernier cas, aussi bien que dans celui du glissement direct des roues, l'intensité du frottement diminue encore à mesure que la vitesse augmente, et paraît même diminuer plus rapidement que dans le cas du glissement direct.

En effet, dans l'hypothèse où cette intensité ne varierait pas avec la vitesse, c'est-à-dire où l'on aurait $f = pk$, on devrait avoir dans les expériences faites avec un seul wagon (40, 29, 30, 31) : $R = pk + 0{,}4 . v^2$, et par conséquent,

$$L = \frac{p}{g}\int_0^V \frac{v}{pk + 0{,}4 . v^2}\, dv = \frac{p}{g} . \frac{\frac{V^2}{2}}{pk + 0{,}4\,\frac{V^2}{3}};$$

d'où $k = \frac{V^2}{20L}\left(1 - \frac{8L}{3p}\right)$, c'est-à-dire

dans les expér. :

	Nos 1	2	3	4	5	6
Du 21 mai, $k =$	0,147	0,144	0,128	0,105	0,096	0,097
Du 24 mai, $k =$	0,141	0,127	0,096	0,087		
Du 27 mai, $k =$	0,181	0,133	0,105			

Ainsi, dans l'hypothèse où l'intensité du frottement de glissement serait indépendante de la vitesse, il faudrait admettre que le coefficient de ce frottement s'est toujours précisément trouvé d'autant plus petit que la vitesse initiale était plus grande, et qu'il a d'ailleurs subi sur les mêmes rails des variations d'une grandeur tout à fait inadmissible. C'est assez dire que l'hypothèse est évidemment inexacte, et que le coefficient du frottement de glissement doit incontestablement, cette fois encore, diminuer à mesure que la vitesse augmente, et diminuer même plus rapidement que dans le cas du glissement direct, ce qui résulte évidemment de la comparaison entre les valeurs de k auxquelles nous venons d'être conduits par l'hypothèse et celles qui ressortent des expériences exécutées en 1851 par M. Poirée (8).

45. Il est donc naturel de penser (15, 17, 18) que l'expression de l'intensité du frottement, dans le cas du glissement des wagons par l'intermédiaire de sabots (en fer), doit encore être de la forme

Forme probable qui en résulte pour son expression.

$$f = \frac{pk}{1 + a.v}$$

et ne différer dès lors de celle qui convient au cas du glissement direct que par les valeurs à donner soit à k, soit à a, soit à tous deux à la fois.

Voyons, à cet égard, ce qu'on peut déduire des résultats obtenus par M J. Poirée dans ses expériences de 1856.

Détermination des co[illegible] cette expr[illegible]

46. Considérons d'abord exclusivement les expériences exécutées avec un seul wagon, expériences qui, indépendamment de leur plus grande simplicité, ont été faites à des vitesses plus variées et plus graduées que les autres.

Dans celles de ces expériences faites avec le frein Cochot, la résistance opposée au mouvement par le wagon était, uniquement et dès le commencement, celle produite par le glissement des sabots, augmentée de la résistance de l'air sur le wagon (dont la surface de front était encore de 6 mètres quarrés). On avait donc (29) :

$$R = \frac{pk}{1 + a.v} + 0{,}4 . v^2,$$

et par conséquent (30, 31) :

$$L = \frac{p}{g} \int_0^V \frac{v + av^2}{pk + 0{,}4 . v^2 + a.04 . v^2}\, dv =$$

$$= \frac{p}{g} \frac{\frac{V^2}{2} + a\frac{V^3}{3}}{pk + 0{,}4\frac{V^2}{3} + a\,0{,}4\,\frac{V^3}{4}} = \frac{\frac{V^2}{2} + a\,\frac{V^3}{3}}{k . 10 + \frac{4}{3}\,\frac{V^2}{p} + a\frac{V^2}{p}}.$$

par suite :

$$k . L . 10 = aV^3\left(\frac{1}{3} - \frac{L}{p}\right) + V^2\left[\frac{1}{2} - \frac{L}{p}\left(1 + \frac{1}{3}\right)\right].$$

Chacune des expériences exécutées, dans lesquelles V, L et p ont eu des valeurs numériques déterminées et connues, fournit donc une équation numérique entre k et a, équation facile à calculer et du premier degré.

Si l'on fait le tracé graphique de tous les résultats obtenus dans les diverses expériences, en prenant les vitesses initiales pour abscisses et les parcours effectués pour ordonnées, on reconnaît de suite, par la disposition relative des points isolés que l'on obtient ainsi, que les valeurs simultanées de k et de a ont dû être à peu de chose près les mêmes dans toutes les expériences différentes de chacune des trois journées d'observation considérée isolément, mais qu'elles ont dû différer,

plus ou moins, entre elles dans chacune de ces trois journées considérées comparativement.

Dès lors on a, pour déterminer les valeurs simultanées *moyennes* de k et de a, afférentes à chaque journée,

Pour la journée du	21 mai.	6 équations.
—	24 mai.	4 —
—	27 mai..	3 —

Les systèmes de valeurs simultanées de k et de a qui résolvent le mieux, c'est-à-dire avec le plus d'approximation possible, chacun de ces trois groupes d'équations, sont :

		k	a
Pour la journée du	21 mai.	0,19	0,070
—	24 mai.	0,18	0,075
—	27 mai.	0,22	0,065

Si, avec ces trois couples de valeurs simultanées de k et de a, on calcule, pour chacune des expériences exécutées dans les trois journées, la valeur de L qui résulterait de la formule ci-dessus, et qu'on la compare à celle observée, on trouve les résultats consignés dans le tableau suivant.

DATES — Mai 1856.	Numéros d'ordre des expériences.	PARCOURS de glissement		DIFFÉRENCES ENTRE LES PARCOURS CALCULÉS et observés				
				absolues		relatives (p. 100)		
						partielles		
		observés.	calculés.	en plus.	en moins.	en plus.	en moins.	moyennes
		mèt.	mèt.	mèt.	mèt.			
21	1	15,0	15,2	0,2	»	1 1/3	»	+ 1/3
	2	26,0	27,7	1,7	»	6 1/2	»	
	3	47,5	48,5	1,0	»	2	»	
	4	94,0	86,5	»	7,5	»	8	
	5	182,0	173,0	»	9,0	»	5	
	6	230,0	242,0	12,0	»	5 1/4	»	
24	1	8,0	7,8	»	0,2	»	1 4	— 1/4
	2	26,0	27,1	1,1	»	4 1/4	»	
	3	137,0	134,0	»	3,0	»	2 1/4	
	4	230,0	224,0	»	6,0	»	2 3/4	
27	1	14,0	15,1	1,1	»	8	»	— 1/2
	2	51,0	46,8	»	4,2	»	8 1/4	
	3	272,0	268,0	»	4,0	»	1 1/2	

Quoique les trois moyennes des différences p. 100, qui se manifestent entre les parcours calculés et ceux observés, ne soient assurément que de l'ordre des erreurs d'observation, et que les différences p. 100 partielles soient bien *tantôt en plus, tantôt en moins*, plusieurs de ces dernières sont un peu trop fortes pour pouvoir être mises purement et simplement sur le compte des erreurs d'observation ; mais elles peuvent parfaitement s'expliquer par cette considération que l'état des rails, dans chacune des trois journées, était de nature à n'être pas absolument le même dans toutes les observations.

En effet, si l'on calcule, au moyen de la formule ci-dessus, en y donnant à a, dans chaque journée, la valeur trouvée pour ce coefficient, si l'on calcule la valeur précise de k à laquelle correspondrait exactement le parcours réellement effectué, on trouve les nombres suivants :

21 mai. . . .	0,193	0,203	0,194	0,175	0,180	0,200
Moyenne. .		0,191				
24 mai. . . .	0,176	0,188	0,176	0,175		
Moyenne. .		0,179				
27 mai. . . .	0,244	0,205	0,219			
Moyenne. .		0,223				

Les différences de ces nombres entre eux, dans chaque journée, sont assurément toutes très-admissibles en raison de l'état constaté des rails dans les trois journées (41), état qui devait être nécessairement un peu variable d'un point de la ligne à l'autre et d'une heure à une autre.

Loi glissement par

47. L'analyse qui précède conduit donc aux conclusions suivantes :

1° La loi d'indépendance de la vitesse, représentée par la formule $f = pk$, est aussi bien infirmée par les résultats obtenus avec le frein Cochot (44) que par ceux obtenus avec le frein ordinaire (8,31,32).

2° Au contraire, la loi représentée par la formule

$$f = \frac{pk}{1 + av}$$

ressort évidemment des résultats obtenus par M. J. Poirée dans ses expériences exécutées sur le frein Cochot avec un seul wagon, en mai 1856, comme elle est ressortie des résultats obtenus par le même M. J. Poirée, en 1851, et par MM. Garella et Bochet, en 1856, dans leurs expériences exécutées avec le frein ordinaire.

48. Seulement, tandis que la valeur de a, qui ressort des expériences exécutées avec le frein ordinaire, est 0,03, avec l'échelle de valeurs de k donnée ci-dessus (21,38), les valeurs à donner à ces deux coefficients, dans la formule, quand il s'agit du glissement par l'intermédiaire de sabots (en fer), seraient

	k valeurs		a
	extrêmes.	moyennes.	
Sur rails secs (temps couvert). . . (27 mai).	0,25 0,20	0,22	0,065
Sur rails assez secs (temps humide) . (21 mai).	0,21 0,17	0,19	0,070
Sur rails humides, mais non mouillés. (24 mai).	0,19 0,17	0,18	0,075

On voit donc que, si la valeur à donner à a est évidemment différente de celle (0,03) qui convient au cas du glissement direct des roues (enrayées par le frein ordinaire), il n'en est pas ainsi des valeurs à donner à k : il est bien évident, au contraire, que ces valeurs sont précisément les mêmes, sur rails au même état.

La valeur de a semblerait varier un peu en sens inverse de celle de k, et le même fait paraîtrait également avoir lieu aussi dans le glissement direct (19). Néanmoins, ici encore, je ne

chercherai pas à tenir compte de cette variation, parce que :

1° Elle ne résulte pas des expériences avec une précision assez certaine pour qu'il soit possible d'en déduire la loi qui la régit ;

2° Elle est trop peu de chose et n'exerce qu'une influence trop peu sensible sur la valeur de l'intensité du glissement, pour qu il convienne d'en compliquer la formule d'une manière dont l'exactitude serait d'ailleurs fort douteuse.

Dès lors, la valeur moyenne de a, résultant des expériences exécutées avec le frein Cochot (sur un seul wagon) étant 0,07, la formule représentative de l'intensité du frottement de glissement des wagons sur les rails par l'intermédiaire de sabots en fer — est

$$f = \frac{pk}{1 + 0{,}07v}.$$

k devant y recevoir, suivant les différents états des rails, exactement les mêmes valeurs que dans le glissement direct des roues (21,38).

Différence qui la distingue de la loi du glissement direct.

C'est donc uniquement par la différence de valeur de a, dans l'un et l'autre mode de glissement, que se produit la différence d'intensité des deux glissements; et c'est pourquoi cette différence ne se prononce bien qu'à grande vitesse et est peu sensible à petite vitesse (42).

Le fait, ainsi précisé, ne laisse pas que d'être assez remarquable.

Derniers faits vérificateurs de la loi des glissements par sabots et direct.

49. Pour n'omettre aucun des résultats expérimentaux obtenus par M. Poirée, je vais maintenant passer en revue les résultats de ses observations de 1856 sur le frein Cochot avec plusieurs wagons, et sur le frein ordinaire avec un ou plusieurs wagons (41). J'en tirerai cet avantage de confirmer les formules que j'ai déduites des autres observations de M. J. Poirée, en montrant que ces formules expliquent également d'une manière très-satisfaisante les observations dont je n'ai pas encore tenu compte, et dont ces formules n'ont pourtant pas été tirées. Ce sera une dernière vérification de leur exactitude.

Dans les expériences avec plusieurs wagons, on avait (29)

$$R = \underset{\text{Glissement.}}{\frac{pk}{1+av}} + \underset{\text{Roulement.}}{(P-p)(0{,}0027 + 0{,}0003\,.\,v)} + \underset{\text{Air.}}{0{,}57\,v^2}\ (1).$$

Et par conséquent (30, 31) :

$$\frac{v + a\,.\,v^2}{[pk + (P-p)\,.\,0{,}0027] + v[(P-p)(0{,}0003 + 0{,}0027\,.\,a)] + v^2[0{,}5 + (P-p)\,.\,0{,}0003\,.\,a] + v^3[0{,}5\,.\,a]}\,dv =$$

$$\frac{V^2\,.\,50 + V^3\,.\left(\frac{a\,.\,100}{3}\right)}{[.1000 + (1-q)\,.\,2{,}7] + V[(1-q)(0{,}15 + 1{,}35\,.\,a) + V^2\left[\frac{183}{P} + (1-q)\,.\,0{,}1\,.\,a\right] + V^3\left[\frac{138\,.\,a}{P}\right]}.$$

En introduisant dans cette dernière formule, pour les diverses expériences exécutées sur le frein Cochot avec plusieurs wagons et relatées ci-dessus (41), les nombres résultant des constatations faites dans ces expériences, et y faisant d'ailleurs $a = 0{,}07$, conformément à ce qui vient d'être dit (48), on en tire une valeur de k pour chaque expérience, et l'on obtient ainsi pour les diverses expériences :

	21 mai.	24 mai.		27 mai.	
		1	2	1	2
K = ...	0,19	0,16	0,20	0,26	0,20
Moyennes. . . .	0,19	0,18		0,23	

Valeurs tout à fait conformes à celles fournies par les autres expériences et comportées par l'état des rails (48).

Si maintenant nous introduisons dans la formule, avec les valeurs de k, moyennes et extrêmes, qui conviennent à l'état des rails dans les trois journées, et avec la valeur 0,03 pour a, les nombres résultant des constatations faites dans les expériences exécutées sur le frein ordinaire avec plusieurs wagons (41), abstraction faite des parcours (qui sont complexes et comprennent, outre les parcours de glissement, ceux effectués pendant le temps employé à serrer le frein), nous pourrons tirer de la formule, pour chacune de ces expériences, une valeur de L, qui sera le parcours de glissement qui aura dû

(1) Avec 3 wagons, c'est 0,51; avec 5 wagons, c'est 0,63; en moyenne, 0,57, qui est suffisamment exact pour les deux cas.

être effectué dans l'expérience, et dont la différence avec le parcours observé (41) devra être le chemin λ fait pendant le temps mis à serrer le frein; comme d'ailleurs ce chemin a été fait sensiblement à la vitesse initiale (25), on peut en déduire le temps τ qui a dû être mis à serrer le frein, suivant que *k* a eu telle valeur ou telle autre. On trouve ainsi :

		L	λ	τ
Dans l'expérience du 21 mai :		mèt.	mèt.	secondes.
En supposant à K la valeur moyenne	0,19	378	32	1,6
les valeurs extrêmes	0,16	439	impossible.	
	0,22	333	77	3,8
Dans les expériences du 24 mai :				
N° 1. En supposant à K la valeur moyenne	0,18	434	71	4,6
les valeurs extrêmes	0,15	505	0	0
	0,21	381	124	7,9
N° 2. En supposant à K la valeur moyenne	0,18	555	30	1,7
les valeurs extrêmes	0,15	645	impossible.	
	0.21	487	98	5,6
Dans l'expérience du 27 mai :				
En supposant à K la valeur moyenne	0,23	111	69	5,7
les valeurs extrêmes	0,20	126	54	4,5
	0,26	99	81	6,7

Il est de toute évidence, surtout si l'on se reporte à ce qui a été dit ci-dessus (25), que, entre les valeurs extrêmes de τ, auxquelles on est conduit, pour chaque expérience, de la manière que je viens d'exposer, doit se trouver celle qui a existé réellement dans cette expérience, et le fait se vérifie même positivement pour l'expérience du 27 mai dans laquelle la valeur de λ, et par conséquent de L, par suite aussi celle de τ, ont été constatées (41). Cette circonstance fournit assurément une nouvelle vérification de la loi du glissement direct que j'ai déduite d'autres expériences.

Enfin, si l'on procède de même pour les expériences exécutées sur le frein ordinaire avec un seul wagon (41), les seules qu'il me reste à passer en revue, on trouve, en se servant d'ailleurs des formules données ci-dessus (46) pour le cas d'un seul wagon (1),

(1) Formules qui, au surplus, ne sont autres que les dernières données, à l'état où elles sont amenées par l'hypothèse d'un seul wagon (au lieu de 3 ou 5).

		L	λ	τ
		mètres	mètres.	secondes.
Dans les expériences du 21 mai :				
N° 1. En supposant à K la valeur moyenne	0,19	44,0	20,0	1,7
les valeurs extrêmes	0,16	52,0	12,0	1,0
	0,22	38,0	26,0	2,2
N° 2. En supposant à K la valeur moyenne	0,19	80,0	50,0	3,2
les valeurs extrêmes	0,16	95,0	35,0	2,3
	0,22	70,0	60,0	3,9
Dans les expériences du 24 mai :				
N° 1. En supposant à K la valeur moyenne	0,18	8,6	2,9	0,5
les valeurs extrêmes	0,15	10,3	1,2	0,2
	0,21	7,4	4,1	0,8
N° 2. En supposant à K la valeur moyenne	0,18	12,1	5,4	0,9
les valeurs extrêmes	0,15	14,5	3,0	0,5
	0,21	10,4	7,1	1,1
N° 3. En supposant à K la valeur moyenne	0,18	16,0	10,0	1,4
les valeurs extrêmes	0,15	19,0	7,0	1,0
	0,21	14,0	12,0	1,7
N° 4. En supposant à K la valeur moyenne	0,18	22,0	8,0	1,0
les valeurs extrêmes	0,15	27,0	3,0	0,4
	0,21	19,0	11,0	1,3
N° 5. En supposant à K la valeur moyenne	0,18	55,0	35,0	2,8
les valeurs extrêmes	0,15	65,0	25,0	2,0
	0,21	47,0	43,0	3,4
N° 6. En supposant à K la valeur moyenne	0,18	71,0	36,5	2,6
les valeurs extrêmes	0,15	85,0	22,5	1,6
	0,22	61,0	46,5	3,2
Dans les expériences du 27 mai :				
N° 1. En supposant à K la valeur moyenne	0,23	19,0	28,5	3,3
les valeurs extrêmes	0,20	22,0	25,5	2,9
	0,26	17,0	30,5	3,5
N° 2. En supposant à K la valeur moyenne	0,23	42,0	53,0	4,2
les valeurs extrêmes	0,20	48,0	47,0	3,8
	0,26	37,0	58,0	4,6
N° 3. En supposant à K la valeur moyenne	0,23	78,0	69,5	4,2
les valeurs extrêmes	0,20	89,0	58,5	3,5
	0,26	69,0	78,5	4,7
N° 4. En supposant à K la valeur moyenne	0,23	117,0	93,0	4,7
les valeurs extrêmes	0,20	133,0	77,0	3,9
	0,26	104,0	106,0	5,3
N° 5. En supposant à K la valeur moyenne	0,23	154,0	122,0	5,4
les valeurs extrêmes	0,20	176,0	100,0	4,4
	0,26	138,0	138,0	6,1

Dans toutes ces expériences, sans exception, il est encore tout à fait admissible que, entre les valeurs extrêmes de τ, auxquelles on est conduit pour chaque expérience, se trouve celle qui a existé réellement dans cette expérience. La chose est de toute évidence pour le plus grand nombre des expériences (25), et si, pour quelques-unes, la valeur de τ qui en résulterait peut paraître un peu faible, elle n'est pourtant pas impossible avec la volonté et l'habileté de serrer les freins très-vite. On peut donc dire que les dernières expériences que je viens de citer, aussi bien que les précédentes, fournissent encore une nouvelle vérification de la loi du glissement direct.

CONCLUSION GÉNÉRALE. — *Formule représentative de l'intensité du frottement de glissement des wagons sur les rails des chemins de fer, soit direct, soit par l'intermédiaire de sabots en fer.*

Formule.

50. La conclusion générale à tirer des diverses expériences que j'ai citées et mises en œuvre est la suivante :

La formule qui doit être adoptée pour représenter la résistance opposée au mouvement par le frottement de glissement des wagons sur les rails des chemins de fer, — soit que leurs roues glissent directement, soit que les wagons glissent par l'intermédiaire de sabots (en fer), — n'est pas la formule accréditée... $f = p \,.\, k$ (1) ; cette formule, suffisamment exacte sans doute tant qu'on reste dans les conditions de vitesse restreinte (et autres) des expériences dont elle est issue (2), ne l'est plus assez quand la vitesse varie entre des limites beaucoup plus écartées (et que les autres conditions du glissement sont d'ailleurs différentes), comme il arrive, en particulier, dans le glissement des wagons sur les rails des chemins de fer.

La formule à adopter est

$$f = \frac{p \,.\, k}{1 + a \,.\, v}$$

dans laquelle

Valeurs numériques des coefficients.

p représente la pression totale qui s'exerce entre les surfaces frottantes,

k est un coefficient dont la valeur dépend, et dépend uniquement, de l'état précis des rails, et doit être pris égal à

0,30 quand les rails sont à leur maximum possible de sécheresse,
0,25 quand les rails sont bien secs,
0,20 quand les rails sont assez secs,
0,14 quand les rails sont mouillés,

et est susceptible de passer par toutes les valeurs intermédiaires (1),

v représente la vitesse du glissement,

a est un coefficient dont la valeur est différente suivant le mode et les conditions du glissement, et semblerait même varier un peu, en même temps, avec *k*, et augmenter sensiblement à mesure que *k* diminue (48, 19);

(1) Il est d'ailleurs certain que ce coefficient peut descendre à des valeurs inférieures à 0,14 sur des rails bien connus pour être plus glissants que lorsqu'ils sont mouillés d'eau; tels sont les rails soumis à une humidité permanente (comme sous les tunnels) ou à l'influence du brouillard (surtout lorsqu'il est épais et prolongé), les rails couverts de givre, de verglas, de feuilles tombées, sans parler du cas où ils sont couverts d'huile ou de graisse (ce qui ne peut guère avoir lieu que sur les points de stationnement). Je ne saurais dire au juste, faute d'expériences positives, jusqu'où peut descendre la valeur de *k* dans ces diverses circonstances; mais il paraîtrait résulter de la pratique de l'exploitation que, abstraction faite des rails tout à fait exceptionnellement glissants (comme lorsqu'ils sont couverts d'huile ou de graisse, de verglas et aussi de feuilles tombées humides), dans les circonstances moins exceptionnelles, où les rails sont néanmoins encore plus glissants que par la pluie (rails soumis à une humidité permanente ou à l'influence du brouillard, voire même couverts de givre), la valeur de *k* doit être considérée comme pouvant descendre à 0,10, quelquefois peut-être à 0,08, mais pas plus bas. Pourtant, je le répète, je ne puis donner à cet égard que des inductions et non des assurances positives.

néanmoins, dans la pratique, on peut, en conservant une approximation bien suffisante, prendre a, quelle que soit d'ailleurs la valeur de k, égal à

0,03 quand les roues glissent directement sur les rails,

0,07 quand le wagon glisse sur les rails par l'intermédiaire de sabots (en fer).

Compatibilité de cette formule avec les résultats des expériences de M. Morin.

51. Je considère comme très-essentiel, on le concevra facilement, de montrer que la formule que je donne n'est nullement incompatible avec les résultats obtenus par M. Morin dans ses belles expériences de 1831-32-33.

Ce que donne la formule à très-petite vitesse.

Aux vitesses de 1, 2, 3 mètres par seconde, qui ont presque toujours été celles du glissement dans les expériences de M. Morin, cette formule eût donné pour $\frac{f}{p}$ les séries de trois valeurs contenues dans le tableau suivant :

	GLISSEMENT direct.			GLISSEMENT par sabots.		
Aux vitesses de.	1	2	3	1	2	3
Sur rails mouillés. . . . . (K=0,14).	0,136	0,132	0,128	0,131	0,123	0,116
Sur rails à l'état moyen. . (K=0,20).	0,194	0,189	0,183	0,187	0,175	0,165
Sur rails les plus secs. . . (K=0,30).	0,291	0,283	0,275	0,280	0,263	0,248

Comparaison avec les résultats expérimentaux obtenus par M. Morin.

Ces valeurs ne diffèrent pas plus entre elles que les coefficients partiels obtenus par M. Morin dans ses diverses expériences sur le frottement entre mêmes substances au même état (et non-seulement du fer sur le fer, mais de beaucoup d'autres substances encore), coefficients partiels dont M. Morin a déduit ses coefficients moyens.

Différence.

On peut dire seulement que les valeurs contenues dans le tableau précédent manifestent, bien que faiblement, une loi de variation constante avec la vitesse qui n'est pas ressortie des résultats obtenus par M. Morin. Mais s'il n'en a pas été ainsi dans les expériences de M. Morin, on peut en donner la raison suivante qui est, je crois, tout à fait plausible.

Explication de cette différence.

M. Morin a pu, dans ses calculs sur l'intensité *moyenne* du frottement pendant la course *entière* de ces traîneaux, négliger la résistance de l'air, dont l'effet *total* et *moyen* était assurément négligeable dans les conditions des expériences. Il n'en est pas moins vrai pourtant que, *à chaque instant*, dans ces expériences, la résistance de l'air était égale à $0^k,065 \cdot s \cdot v^2$, et comme s (la surface de front du traîneau et de la caisse descendante) était égale à $1^{m^2},13$, la résistance de l'air était, *à chaque instant*, égale à $0^k,0735 \cdot v^2$.

Les résultats obtenus par M. Morin rentrent réellement dans le principe de la formule.

On peut donc dire que, du moment que les courbes, *si précises*, tracées par le remarquable appareil de M. Morin, ont manifesté la sensible *constance* de la force F, composée du frottement de glissement du traîneau *augmenté* de la résistance de l'air, c'est que le frottement de glissement f du traîneau était sensiblement égal, *à chaque instant*, à $(F - 0,0735 . v^2)$, c'est-à-dire *diminuait à mesure que la vitesse augmentait.*

Ils sont même, numériquement, tout à fait compatibles avec elle.

Et si d'ailleurs, pour se rendre compte de l'importance de cette diminution dans les expériences de M. Morin, on calcule, pour celles de ces expériences qui sont le plus de nature à la mettre en évidence, c'est-à-dire pour celles où la vitesse (à 3 mètres de course) a été le plus élevée, si on calcule la valeur de f résultant de la formule.... $f = F - 0,0735 . v^2$.... à la vitesse finale du traîneau, et qu'on la compare à celle de F, qui représente l'intensité réelle du frottement à l'origine de la course (une fois la résistance au départ vaincue); enfin, si l'on compare entre elles les valeurs de $\frac{F}{p}$ et de $\frac{f}{p}$, on trouve les résultats consignés dans le tableau suivant.

DÉSIGNATION des expériences relatées par M. Morin.		VITESSES à 3 mètres de course v en mètres par seconde.	POIDS glissant p.	F.	f.	$\frac{F}{p}$	$\frac{f}{p}$
Tableaux.	Numéros des expériences						
		mèt.	kilogr.	kilogr.	kilogr.		
III.	12	3,07	54,67	25,82	25,13	0,472	0,460
IV.	1	3,93	97,51	33,14	32,00	0,340	0,328
VIII.	6	3,08	418,5	169,82	169,10	0,406	0,404
Id.	12	3,20	177,8	77,73	76,98	0,437	0,433
XIX.	2	3,10	107,1	42,91	42,21	0,401	0,394
XXVII *bis*. . . .	3	3,78	180,9	59,49	58,43	0,329	0,323
XXXIII.	2	3,54	114,9	60,07	59,15	0,523	0,515

On voit par ce tableau que les différences qui ont existé réellement, dans les expériences même de M. Morin, entre les valeurs de $\frac{F}{p}$ et de $\frac{f}{p}$, sans être grandes assurément, sont pourtant notables et à peu près de même ordre, en général, que celles du premier tableau ci-dessus; de sorte qu'elles peuvent fort bien être le commencement, à petites vitesses, de différences plus grandes qui existeraient entre ces quantités à des vitesses variées entre des limites plus éloignées l'une de l'autre, telles que les différences qui ressortent des expériences relatées dans le présent mémoire.

Généralité probable du phénomène et de la formule.

Généralité probable du phénomène.

52. De ce qui précède on peut conclure que

Il est bien *possible*, on peut même dire *probable*, — sans que cela soit aucunement en contradiction avec les résultats expérimentaux obtenus par M. Morin, *au contraire*, — que la diminution d'intensité du frottement de glissement, à mesure que la vitesse augmente, est un phénomène général, et non pas seulement particulier au glissement des wagons sur les rails du chemins de fer.

On pouvait en effet se demander si ce phénomène, bien établi pour le dernier cas par les expériences nombreuses et concluantes relatées dans le présent mémoire, ne doit pas être attribué, dans ce cas, aux conditions particulières du glissement des wagons sur les rails, c'est-à-dire à la flexibilité des rails entre leurs appuis (1) et à leurs vibrations, d'autant plus prononcées, nécessairement, que la vitesse est plus grande; car on sait, par les observations même de M. Morin, que les vibrations diminuent l'adhérence. Mais c'est là une circonstance qui doit se produire, *plus ou moins*, dans tout glissement, et d'autant plus que la vitesse devient plus grande; de sorte que lors même que ce serait la cause unique de la diminution d'intensité du frottement de glissement des wagons sur les rails à mesure que la vitesse augmente, cette même cause, agissant également, plus ou moins, dans tout autre glissement, devrait y produire le même effet, d'une manière plus ou moins pro-

(1) Les expériences n'ayant porté que sur des voies établies à la manière ordinaire.

noncée; et la discussion à laquelle je viens de me livrer (51) sur les résultats des expériences de M. Morin, prouverait que cet effet commence à être réellement *sensible*, même à très-petite vitesse (et sur des surfaces très-peu flexibles), dans les glissements divers observés par M. Morin; ce qui rend très-*admissible* et même très-*probable* que ce même effet, quelle que soit d'ailleurs sa cause réelle, doit se produire d'une manière plus prononcée à mesure que la vitesse augmente, dans ces mêmes glissements divers. Cet effet pourrait d'ailleurs être et serait sans doute plus ou moins marqué suivant les circonstances : par exemple, sur des rails posés sur longrines, éclissés, etc., (1), et en général dans tous les cas de glissement se produisant comme dans les expériences de M. Morin, même à grandes vitesses, il est fort possible et même très-probable que la variation d'intensité du frottement avec la vitesse serait *moins considérable* que dans les conditions des expériences relatées dans le présent mémoire ; mais il est en même temps très-probable qu'elle s'y produirait encore d'une manière sensible et même très-notable.

53. Du moment que l'intensité du frottement de glissement irait en diminuant à mesure que la vitesse augmente, il est tout à fait *présumable* (15, 17, 18), que cette intensité devrait être représentée par la formule Formule génér selon toute probabil

$$f = \frac{pk}{1 + a.v}$$

ou, tout au moins, par la formule

$$\frac{f}{p} = \gamma + \frac{k - \gamma}{1 + a.v}$$

dans lesquelles les valeurs de k resteraient d'ailleurs, pour les différentes substances, celles qui ont été déterminées par M. Morin (2). Valeurs des coefficien de la formul

(1) Dont la flexibilité et les vibrations seraient beaucoup moindres que sur rails ordinaires.

(2) J'ai entendu quelquefois émettre l'opinion que les coefficients de frottement de M. Morin sont trop forts. Cette opinion pourrait avoir la raison d'être suivante : appliqués à des glissements à grande vitesse, ils ont pu être trouvés trop forts, car ils peuvent et doivent même probablement l'être en effet, d'après ce que je viens de dire (52); mais ils restent inattaquables à petite vitesse et surtout à très-petite vitesse, quand

Il y aurait seulement à déterminer les valeurs de a (et peut-être, quelquefois, de γ) qui conviendraient aux différents cas et modes de glissement, comme je l'ai fait dans le présent mémoire pour le glissement des wagons sur les rails ordinaires des chemins de fer, soit direct, soit par l'intermédiaire de sabots (en fer).

(Sur des rails posés sur longrines, éclissés, etc., et, en général, dans les conditions des expériences de M. Morin, a pourrait fort bien être et serait même très-probablement moindre et égal à quelques millièmes seulement).

Questions corrélatives à éclaircir.

Doutes permis sur des questions subsidiaires.

54. Il est d'ailleurs permis de se demander si la loi d'indépendance de l'étendue des surfaces frottantes, et même celle de proportionnalité à la pression totale qui s'exerce entre ces surfaces, — lois qui sont incontestablement établies, comme

---

d'ailleurs les autres conditions dans lesquelles s'opère le glissement ne sont pas très-différentes de celles des expériences de M. Morin.

J'ajoute à dessein cette dernière restriction, parce qu'elle peut donner l'explication de certaines différences qui pourraient se manifester entre les valeurs du coefficient k, déterminées par des expériences spéciales, pour des substances données, et celles du coefficient de frottement, entre les mêmes substances, déterminées par M. Morin.

Ainsi le coefficient de frottement, résultant des expériences de M. Morin, pour les cas du frottement de fer sur fer, sans enduit(fibres parallèles au sens du mouvement, est 0,14 (résultat moyen de 3 expériences dont les résultats partiels ont été 0,12 ; 0,16; 0,14); et la valeur de k, résultant des expériences relatées dans le présent mémoire, ne descend là que quand les rails sont mouillés; quand les rails sont sensiblement secs, comme le fer devait l'être dans les expériences de M. Morin, la valeur de k est au moins 0,17 ou 0,18, plutôt encore 0 20, et quelquefois même au dessus : mais il ne faut point perdre de vue que les conditions du glissement des wagons (pesant de 3 à 9 tonnes) sur une voie de chemin de fer (dont les rails sont un peu flexibles et présentent d'ailleurs des joints plus ou moins imparfaits), ne sont pas du tout les mêmes que celles du glissement des traîneaux de M. Morin, qui ne pesaient que 334 et 506 kilogrammes (dans les expériences de frottement du fer sur le fer, à sec), et qui glissaient sur des bandes inflexibles et parfaitement continues, qui pouvaient d'ailleurs être un peu onctueuses (d'après des explications qui m'ont été données verbalement par M. Morin lui-même).

régissant (au moins *sensiblement*) le phénomène du glissement, par les expériences de M. Morin, *mais seulement dans les circonstances et limites de ces expériences*, — ne cesseraient pas, aussi bien que la loi d'indépendance de la vitesse, de régir le phénomène *dans des circonstances et entre des limites très-différentes, surtout à mesure que la vitesse devient plus grande.*

Certains faits, de ceux même qui sont relatés dans le présent mémoire, donneraient à le penser : ainsi, le fait de l'intensité du frottement par sabots un peu moindre que l'intensité du frottement direct des roues (et d'autant plus que la vitesse devient plus grande), fait que l'on ne peut guère attribuer qu'à l'étendue beaucoup moindre de la surface frottante dans le second cas, et qui donnerait à penser que l'intensité du frottement augmente un peu quand l'étendue de la surface frottante diminue (d'autant plus que la vitesse devient plus grande); ce qui conduirait à admettre que l'intensité du frottement, *par élément de surface frottante*, n'est pas tout à fait proportionnelle à la pression (1). A ce sujet, il est important de remarquer que, si les expériences relatées dans le présent mémoire n'ont pas infirmé la loi de la proportionnalité au poids frottant, *dans les conditions nouvelles de ces expériences* (13, 14), on ne peut pas dire qu'elles l'aient positivement confirmée comme rigoureusement exacte *entre des limites de poids très-écartées*; et l'on voit qu'il est bien permis de se demander si cette loi est tout à fait et rigoureusement générale.

Mais les faits dont je viens de parler, tout en autorisant le doute, ne sont pas assez concluants pour le résoudre, et la question réclame et mérite assurément une étude toute spéciale (2).

55. S'il était effectivement vrai que le rapport de l'intensité du frottement de glissement (f) à la pression (p), qui s'exerce **Conséquences possibles et même probables.**

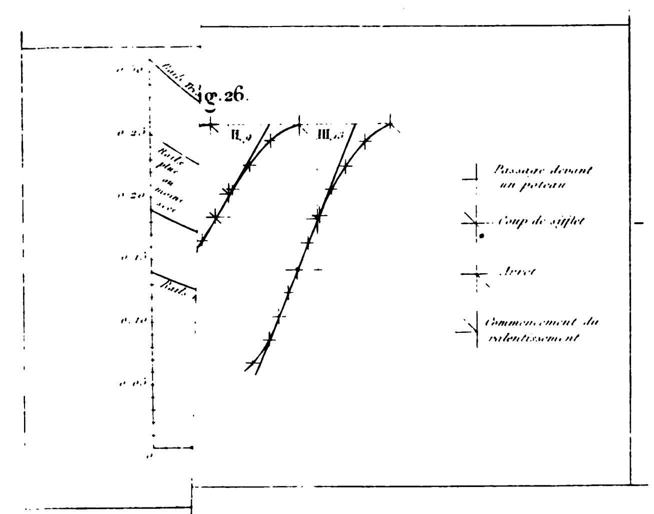
---

(1) On se demande si l'on ne doit pas voir une raison de plus de croire à la possibilité d'exactitude de cette dernière conséquence dans ce fait que les valeurs de k, dans le glissement des wagons sur les rails, sont supérieures aux valeurs du coefficient de glissement du fer sur le fer, résultant des expériences de M. Morin, expériences dans lesquelles la pression, par élément de la surface frottante, était considérablement moindre que dans les expériences relatées dans le présent mémoire; et si, bien qu'on puisse attribuer le fait à d'autres causes (53, note), celle-là n'en serait pas, néanmoins et nonobstant, la principale.

(2) Que j'espère avoir prochainement la possibilité de faire, et dont je publierai ultérieurement les résultats.

entre les surfaces frottantes, ne fût pas rigoureusement indépendant de cette pression (p) non plus que de l'étendue de ces surfaces (s), — c'est-à-dire, sans doute, de la pression par élément superficiel, — alors les coefficients a et k (et aussi γ, s'il entrait dans la formule, ce qui pourra arriver quelquefois) seraient des fonctions de ces quantités (p et s), fonctions à variation peu rapide, selon toute apparence, et qui pourraient, sans doute, être remplacées, la plupart du temps, pour les applications pratiques, par des nombres, indépendants de ces quantités (p et s), seulement par des nombres un peu différents quand les circonstances des applications seraient très-différentes, comme il arrive précisément dans les cas pratiques envisagés dans le présent mémoire.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Cᵉ, rue Racine, 26.



... nales des Mines.

entre les surfaces frottantes, ne fût pas rigoureusement indépendant de cette pression (p) non plus que de l'étendue de ces surfaces (s), — c'est-à-dire, sans doute, de la pression par élément superficiel, — alors les coefficients a et k (et aussi γ, s'il entrait dans la formule, ce qui pourra arriver quelquefois) seraient des fonctions de ces quantités (p et s), fonctions à variation peu rapide, selon toute apparence, et qui pourraient, sans doute, être remplacées, la plupart du temps, pour les applications pratiques, par des nombres, indépendants de ces quantités (p et s), seulement par des nombres un peu différents quand les circonstances des applications seraient très-différentes, comme il arrive précisément dans les cas pratiques envisagés dans le présent mémoire.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Ce, rue Racine, 26.

